3-11-21 4η Διάλεξη

Φυλλάδιο 1

① Ν.δ.ο αν I διάστημα, τότε $I \cong \mathbb{R}$

Λύση

$\boxed{\text{1η περίπτωση}}$

$I=(a,b)$. Έστω ότι $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}$, f συνεχής, $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty \Rightarrow f(a,b)=\mathbb{R}$ (επί)

$f'(x)=\frac{-1}{(x-a)^2}+\frac{-1}{(x-b)^2}<0 \quad \forall x\in(a,b)$

$f \downarrow$ Άρα, f 1-1.

(*) Λήμμα. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\cong(a,b)\cong\mathbb{R}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0,1,\dots \\ x+1, & x\in\{0,1,2,\dots\} \end{cases}$

1-1 και επί

$\boxed{\text{2η περίπτωση}}$

$I=(a,+\infty)$. Έστω $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$f(x)=\frac{1}{x-a}-x$ τότε f συνεχής, 1-1 και επί

3η περίπτωση

$I=(-\infty,a)$ με $f(x)=-x$.
Άρα $(-\infty,a)\cong(a,+\infty)\cong\mathbb{R}$

4η περίπτωση

$I=[a,b)$ $\exists\, f:(a,b)\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ με $f(x)=x-a$, 1-1, επί
Θέτω $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b)\\ 0, & x=a\end{cases}$
Είναι 1-1 και επί.

5η περίπτωση

$I=[a,b] \overset{f(x)=-x}{\cong} [-b,-a) \overset{4\eta\ \pi\varepsilon\rho.}{\cong} \mathbb{R}$

6η περίπτωση

$I=[a,b]$: $\exists_{(4)}\, f:[a,b)\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 1-1 και επί

Θέτω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b)\\ 0, & x=b\end{cases}$
με $f(x)=x-b$

7η περίπτωση

$I=[a,+\infty)$: $\exists\, f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 1-1 κ' επί
Θέτω $g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,\infty)\\ 0, & x=a\end{cases}$
1-1 και επί

8η περίπτωση
$I=(-\infty,a]\cong[-a,+\infty)$.

(2iii) Έστω $\{x_n\}$ τ.ω $x_n \neq 0 \ \forall n$. Ν.Δ.Ο

$$\liminf \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq \liminf |x_n|^{1/n} \leq \limsup |x_n|^{1/n} \leq \limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

Λύση

Έστω $g_n = \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ $n \in \mathbb{N}$

$$① \ |x_n|^{1/n} = \Bigg(\underbrace{\frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}}_{g_{n-1}} , \underbrace{\frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|}}_{g_{n-2}} , \dots \underbrace{\frac{x_2}{x_1}}_{g_1} \Bigg)^{1/n} \cdot (x_1)^{1/n}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω

$$\limsup \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell \in \mathbb{R}$$

$$② \ \ell = \lim_n \underbrace{\sup \left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n}, \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}, \dots \right\}}_{= a_n}$$

Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$$\overset{①}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0 \ \sup \Bigg\{ \underbrace{\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}}_{g_n} , \underbrace{\frac{|x_{n+2}|}{|x_{n+1}|}}_{g_{n+1}} , \dots \Bigg\} < \ell + \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $g_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow$

$$\overset{②}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0 \ |x_n|^{1/n} = \Big(\overset{<\ell+\varepsilon}{g_{n-1}} , \overset{<\ell+\varepsilon}{g_{n-2}} , \dots , \overset{<\ell+\varepsilon}{g_{n_0}} \Big)^{1/n} \cdot \big[(g_{n_0-1} \cdots g_1) x_1 \big]^{1/n}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \ |x_n|^{1/n} < \big((\ell+\varepsilon)^{n-n_0} \big)^{1/n} \cdot \big((g_{n_0-1} \cdot g_1) x_1 \big)^{1/n}$$

$$= (\ell + \varepsilon) \cdot 1 = \ell + \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |x_n|^{1/n} < \ell + \varepsilon$

$\limsup |x_n|^{1/n} = \limsup \{ |x_n|^{1/n}, |x_{n+1}|^{1/n+1}, \dots \} \leq \ell + \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \limsup |x_n|^{1/n} \leq \ell$

(3) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Ν.δ.ο $\exists \{x_n\}$ αύξουσα, $\{s_n\}$ φθίνουσα

από το A τ.ω $x_n \to \sup A$
$s_n \to \inf A$

Λύση

Θέτω $M = \sup A \subseteq \mathbb{R}$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A$ τ.ω $M \geq x_\varepsilon \geq M - \varepsilon$
Για $\varepsilon = 1 \ \exists x_1 \in A$ τ.ω $M > x_1 > M - 1$
Για $\varepsilon = 1/2 \ \exists y \in A$ τ.ω $M \geq y \geq M - 1/2$
Θέτω $x_2 = \max\{y, x_1\} \Rightarrow$
Για $\varepsilon = 1/3 \ \exists y \in A : M \geq y \geq M - 1/3$
Θέτω $x_3 = \max\{y, x_2\} \Rightarrow x_3 \geq x_2, \ M \geq x_3 \geq M - \frac{1}{3}$
⋮
Για $\varepsilon = 1/n \ \exists x_n \in A$ τ.ω $x_n \geq x_{n-1}, \ M \geq x_n > M - 1/n$
$\{x_n\} \subseteq A \longrightarrow x_n$ μια ακολουθία απο το A.
τ.ω $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $M - 1/2 \leq x_n \leq M$
$\forall n \in \mathbb{N}$

(4) $\{a_n\}$ πραγματική ακολουθία τ.ω $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$. Ν.δ.ο το $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει max

Λύση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έχω ο α $a_n \neq 0 \to$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \ a_n > 0\}$ (Αξίωμα καλής διατ.)

• $a_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ τ.ω $\forall n \geq N$

Διαλέγω $\qquad |a_n - 0| = a_n < \varepsilon$

$\varepsilon = a_{n_0} > 0$

$\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq N, a_n < a_{n_0}$

Ισχυρισμός $N > n_0$ (αλλιώς $a_{n_0} < a_{n_0}$ άτοπο)

$\forall n \geq N, \quad a_n < a_{n_0}$

Για $n < N$ ($\Leftrightarrow n \leq N-1$). Το σύνολο $\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$ είναι πεπερασμένο.

Άρα, έχει max στοιχείο

$\Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, N-1\}$ τ.ω $a_k \geq a_n, n = 1, 2, \dots, N-1$

$a_k \geq a_1, a_2, \dots a_{N-1}$ και $a_k \geq a_{n_0} > a_n \ \forall n \geq N$

άρα $a_k > a_n$

άρα $a_k = $ max στοιχείο.

⑤ $\{a_n\}$ μη φραγμένη. Ν.δ.ο $\exists \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ τ.ω $a_{k_n} \to \pm\infty$.

Λύση

Χωρίς βλάβη γενικότητας έστω $\{a_n\}$ όχι άνω φρ.

• $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω $a_{k_1} > 1$ (αλλιώς $a_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

• $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω $k_2 > k_1$

$a_{k_2} > 2$ (αλλιώς $\forall k > k_1 \ a_k < 2$)

$\Rightarrow a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_1}, 2\} \ \forall n \in \mathbb{N}$

• $\exists k_3 \in \mathbb{N}$ με $k_3 > k_2$ κ' $a_{k_3} > 3$ (αλλιώς... $\Rightarrow a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots a_{k_2}, 3\}$)

Ορίζω $\{k_n\}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών τ.ω $a_m \geq n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{k_n} \to \infty$

(6) Δες εκφώνηση στο e-course

Λύση

Θέτω $a = \inf(G \cap \mathbb{R}^+) = \inf[G \cap (0,\infty)]$

(1) Έστω $a = 0 \Rightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G \cap \mathbb{R}^+ : a_n \to 0$

Έστω $x \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ έστω $a_{n_0} < \varepsilon$

Θέτω $k_{n_0} = \max\{t \in \mathbb{Z} \mid x - k a_{n_0} \geq 0\}$ τότε:

$0 \leq x - k_{n_0} \cdot a_{n_0} < \varepsilon$. Έστω $x - k_{n_0} \cdot a_{n_0} \geq \varepsilon$

Τότε $x - (k_{n_0}+1) a_{n_0} = x - k_{n_0} a_{n_0} - a_{n_0} \geq \varepsilon - \varepsilon = 0$

Άρα, $0 \leq x - k_{n_0} a_n < \varepsilon \Rightarrow |x - k_{n_0} a_{n_0}| < \varepsilon$.

(2) Έστω $a > 0$. Αν $a \notin G$ ($\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G \cap \mathbb{R}^+$: $a_n \to a$, $a_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_n$ Cauchy $\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ $|\overbrace{a_m - a_n}^{\in G}| < \frac{a}{2}$ Άτοπο

Άρα $a \in G \Rightarrow ka \in G \ (\forall k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow G \supseteq \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Έστω $x \in \mathbb{R}$: $x \notin \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow (\exists \varepsilon \in (0,a))(\exists k_0 \in \mathbb{Z})$
$x = k_0 a + \varepsilon$.

(7) Να βρεθούν όλα τα οριακά της $\{\cos n\}$

<u>Λύση</u>

Θέτω $G := \{n + 2\pi m : m, n \in \mathbb{Z}\}$

Αν $\left.\begin{array}{l} x = n + 2\pi m \\ y = n' + 2\pi m' \in G \end{array}\right\} \Rightarrow x - y \in G$

Απο άσκ. 6 $\Rightarrow \exists \underset{\inf(G \cap (0,\infty))}{\overset{\shortparallel}{a}} > 0$ τ.ω $G = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$ ή $\bar{G} = \mathbb{R}$

Θ.δ.ο $\bar{G} = \mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq G$ τ.ω
$x_n \to x \Rightarrow \exists \{k_n\}, \{d_n\} \subset \mathbb{Z}$ τ.ω $k_n + 2\pi d_n \to x$
$\Rightarrow \cos k_n = \cos(k_n + 2\pi d_n) \to \cos x$
Όμως, $2\pi \in G \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $a n_0 = 2\pi \Rightarrow$
$a = \frac{2\pi}{n_0}$

Αλλά $n \in G$ $\forall n \in \mathbb{N}$ για $m = 0$

(1) $\Rightarrow \exists n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω $1 = a n_0' = \frac{2\pi n_0'}{n_0} \Rightarrow 2\pi = \frac{n_0}{n_0'} \in$
Άτοπο.